Den gylne regel for investering

I Solow-modellen tas investeringsraten som eksogent gitt. Men det e åpenbart at et land har mulighet til å velge eller i alle fall påvirke investeringsraten. Hvis vi kunne velge fritt, hvilken investeringsrate ville vi velge?

For det første må vi etablere et kriterium for hva som er et godt valg. Grunnleggende økonomisk innsikt forteller oss at det egentlige formålet med produksjon er konsum. Det virker derfor rimelig å velge så stort konsum per innbygger som mulig som et kriterium.

Men vi må ta tidsdimensjonen i betraktning. I en vekstsammenheng vil det være rimelig å bruke stasjonærtilstanden som referanse, dvs. vi vil søke å gjøre konsum per innbygger størst mulig i stasjonærløsningen ved valget av investeringsrate. Investeringsraten går fra å være en eksogen variabel i modellen (verdien gitt) til å bli en endogen variable (vi skal bestemme verdien). Vi forutsetter at vi bare kan velge ett tall for investeringsraten som skal gjelde for alle tidsperioder. (Dette strider jo klart mot virkeligheten, men vi er i vår abstrakte verden og har bruk for en forenklende forutsetning, hva skjer *hvis* vi, osv.)

Det formelle optimeringsproblemet kan da formuleres:

Maks $_\gamma$ c =C/Y

gitt

Solow-modellen, og at vi er i stasjonærtilstanden.

Vi bruker den enkleste varianten av Solow-modellen i Weil, Chapter 3 (konstant investeringsrate og konstant depresieringsrate, konstant befolkning), og skriver den direkte på intensiv-form:

$$\begin{aligned}
&y = f(k) \;\; (f' > 0, f'' < 0) \\
&y = c + i \\
&i = \gamma y \\
&\dot{k} = \gamma f(k) - \delta k
\end{aligned}$$

Stasjonærtilstand krever

$$\dot{k} = 0 = \gamma f(k) - \delta k \Rightarrow \gamma f(k) = \delta k$$

Presisering av det formelle optimeringsproblem:

$$\begin{aligned}
&Maks_{\gamma}\; c = y - i \\
&gitt \\
&y = f(k) \\
&i = \gamma y \\
&\gamma f(k) = \delta k
\end{aligned}$$

Innsetting for i og y i målfunksjonen gir:

$$Maks_{\gamma}\ c = f(k) - \gamma f(k)$$
$$gitt$$
$$\gamma f(k) = \delta k$$

Innsetting av betingelsen for stasjonærtilstand i målfunksjonen ved å erstatte investeringer med kapitalslitet (det siste leddet i målfunksjonen) gir

$$Maks_{\gamma}\ c = f(k) - \delta k$$

Vi har nå eliminert investeringsraten γ eksplisitt fra problemet og kvittet oss med bibetingelsene. Vi har nå to likeverdige muligheter:

a) Maksimere mhp γ når vi tar hensyn til at i stasjonærløsningen så er kapital per arbeider, k, en funksjon av γ
b) Stasjonærtilstanden (bibetingelsen ovenfor) knytter en entydig positiv monoton sammenheng mellom k og γ, vi kan derfor maksimere c mhp k

Variant a):

$$Maks_{\gamma}\ c = f(k) - \delta k \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \gamma} = f'(k)\frac{\partial k}{\partial \gamma} - \delta \frac{\partial k}{\partial \gamma} = (f'(k) - \delta)\frac{\partial k}{\partial \gamma} = 0$$

Vi forutsetter at $\partial k / \partial \gamma \neq 0$ (vi har at den deriverte er positiv i Fig. 3.6 ved positivt skift i γ). Vi kan da forkorte bort denne deriverte og sitter igjen med resultatet

$$f'(k) = \delta$$

Variant b):

$$Maks_{k}\ c = f(k) - \delta k \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial k} = f'(k) - \delta = 0$$

(Merk at denne varianten utnytter at k er monotont stigende med γ.)

Den deriverte av produktfunksjonen er hellingen på produktfunksjonen i punktet k og skal sette lik depresieringsraten. I en figur som 3.4 betyr dette at tangenten til produktfunksjonen skal gå parallelt med strålen for kapitalslit. Ved parallell-forskyvning av strålen som beskriver kapitalslitets variasjon med k får vi dermed bestemt den k som i stasjonærtilstanden maksimerer c. Kurven for investeringer, γf(k), vil skifte nedover i 3.4 (starter ut fra origo) slik at den skjærer strålen som gir depresieringen akkurat for denne k-verdien. Differansen mellom produksjonskurven og den nye investeringskurven er det maksimale konsumet per innbygger i stasjonærtilstanden.

Den gylne regel sier at vi i stasjonærtilstanden skal investere akkurat så mye at depresieringen per enhet av kapitalen per arbeider (k) akkurat kan kompenseres ved produksjonen per arbeider ved en marginal økning i k, dvs. marginalproduktiviteten til kapitalen er lik depresieringsraten.